UOKonline.com

B.A./B.Sc. (Part-II) EXAMINATION, 2017

MATHEMATICS

Paper-I

(Real Analysis)

Time Allowed : Three Hours **Maximum Marks : Science 75/ Art : 66**

Section-A **खण्ड-अ** **(Science-10/Arts-5)**

इस खण्ड में एक अनिवार्य प्रश्न है, जिसमें प्रत्येक इकाई से 2 लघु प्रश्न लेते हुए कुल 10 लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर 20 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Section-B **खण्ड-ब** **Max. Marks : 35**

(Science/Arts)

इस खण्ड में प्रत्येक इकाई से 2 प्रश्न लेते हुए कुल 10 प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई में एक प्रश्न का चयन करते हुए कुल 5 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Section-C **खण्ड-स** **Max. Marks**

UOKonline.com

(Science-30/Arts-26)

इस खण्ड में 04 प्रश्न वर्णनात्मक होंगे (प्रश्न के उप-भाग भी हो सकते हैं) जो सभी इकाइयों में से दिये जायेंगे, किन्तु एक इकाई से एक से अधिक प्रश्न नहीं होगा। किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दिये जाने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 500 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान है।

SECTION-A (खण्ड–अ)

1. (i) If x, y, z are elements of an ordered field F and $x > y$ and $y > z$, then prove that $x > z$.
यदि x, y, z किसी क्रमित क्षेत्र F के अवयव हों तथा $x > y$ और $y > z$ हों; तो सिद्ध कीजिए कि $x > z$.

(ii) Define Cauchy's sequence.
कॉशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(iii) Write the Leibnitz's test for alternating series.
एकान्तर श्रेणी के लिए लाइबनीज परीक्षण लिखिए।

UOKonline.com

(iv) Show that the following series is not convergent:
प्रदर्शित कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी नहीं है:

$$\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(n+1)}}+\ldots$$

UOKonline.com

(v) Define countable set.
गणनीय समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define Interior point of a set.
एक समुच्चय के आन्तरिक बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

(vii) Write any two properties of a continuous function on closed interval.
संवृत अन्तराल में एक संतत फलन के कोई दो गुण लिखिए।

(viii) Write the statement of Darboux Intermediate Value Theorem for Derivatives.
अवकलजों के लिए डारबो मध्यवर्ती मान प्रमेय का कथन लिखिए।

(ix) Define Improper Integral.
अनन्त समाकल को परिभाषित कीजिए।

UOKonline.com

(x) Write the Riemann's criterion for Integrability.
समाकलनीयता के लिये रीमान कसौटी लिखिए।

Section-B/खण्ड-ब

UNIT-I/इकाई-I

2. (a) If p is a prime number, then prove that $\sqrt{p}$ is not a rational number.
यदि p एक अभाज्य संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p}$ परिमेय संख्या नहीं है।

(b) Prove that the supremum and infimum of a non-void subset S of an ordered field F if exist, are always unique.
सिद्ध कीजिए कि यदि किसी क्रमित क्षेत्र F के किसी अरिक्त परिबद्ध उपसमुच्चय S के उच्चक तथा निम्नक F में विद्यमान हैं, तो वे अद्वितीय होते हैं।

3. Prove that a monotonically decreasing sequence is convergent iff it is bounded and in that case $\lim x_n = \inf\langle x_n\rangle$.
सिद्ध कीजिए कि एकदिष्ट वर्धमान ह्रासमान अनुक्रम $\langle x_n\rangle$ अभिसारी होती है यदि वह परिबद्ध हो तथा उस स्थिति में
$\lim x_n = \inf\langle x_n\rangle$.

UNIT-II/इकाई-II

4. Test the convergence of the following series:
निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण का परीक्षण कीजिए:

(i) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\ldots$

UOKonline.com

(ii) $x+\frac{2^2x^2}{|2|}+\frac{3^3x^3}{|3|}+\frac{4^4x^4}{|4|}+\ldots\ldots$

UOKonline.com

5. *(i)* Define Absolutely convergent and conditionally convergent for an alternating series.

एक एकान्तर श्रेणी के लिए निरपेक्षत: अभिसारी तथा सप्रतिबन्ध अभिसारी को परिभाषित कीजिए।

(ii) Discuss the convergence and obsolute convergence of the following series :

निम्नलिखित श्रेणी की अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण के लिए विवेचना कीजिए:

$1-2x+3x^2-4x^3+\ldots\ldots$

UNIT-III/इकाई-III

6. Prove that any subset S of R is an open set iff its complement is closed.

सिद्ध कीजिए कि R को कोई उपसमुच्चय S विवृत समुच्चय है यदि और केवल यदि इसका पूरक समुच्चय संवृत है।

UOKonline.com

7. (i) Prove that every subset of a countable set is countable.

सिद्ध कीजिए कि एक गणनीय समुच्चय का प्रत्येक उपसमुच्चय गणनीय होता है।

(ii) Prove that the set Z^* of all non-negative integers is a countable set.

सिद्ध कीजिए कि सभी अऋणात्मक पूर्णांकों का समुच्चय Z^* गणनीय होता है।

UNIT-IV/इकाई-IV

8. Examine for continuity and differentiability of the function $f(x) = |x-2|+2|x-3|$ in the interval [1, 4].

फलन $f(x) = |x-2|+2|x-3|$ की अन्तराल [1, 4] में सांतत्य तथा अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

9. State and prove Lagrange's Mean Value Theorem and also write its Geometrical Interpretation.

लाग्रांज मध्यमान प्रमेय का कथन लिखकर इसे सिद्ध कीजिए तथा इसका ज्यामितीय अर्थ भी लिखिए।

UNIT-V/इकाई-V

10. If $f \in R[a, b]$, then prove that $|f| \in R[a, b]$ but the converse is not necessarily true. Also prove that:

यदि $f \in R[a, b]$, तो सिद्ध कीजिए कि $|f| \in R[a, b]$ परन्तु इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है। यह भी सिद्ध कीजिए कि:

UOKonline.com

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

11. If function

$f(x) = \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ and

UOKonline.com

$P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2n}{2n}, \ldots\ldots\ldots \frac{n\pi}{2n}\right\}$ is the partition of $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, then prove that

$f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

यदि फलन $f(x) = \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ और

$P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2n}{2n}, \ldots\ldots\ldots \frac{n\pi}{2n}\right\}$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

एक विभाजन है, तो सिद्ध कीजिए कि $f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Section-C/खण्ड-स

UOKonline.com

12. (i) Prove that every complete ordered field R is an Archimedean ordered field.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पूर्ण क्रमित क्षेत्र R एक आर्किमिडीय क्रमित क्षेत्र होता है।

(ii) Prove that the following sequence $\langle x_n \rangle$ converges to the positive root or the equation $x_2-x-7=0$ where:

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ समीकरण $x_2-x-7=0$ के धनात्मक मूल से अधिसृत होती है जहाँ : $x1 = \sqrt{7}$, $x_{n+1} = \sqrt{7+x_n}$.

(iii) Prove that the intersection of a finite number of open sets is an open set.

सिद्ध कीजिए कि परिमित संख्या में विवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ भी एक विवृत समुच्चय होता है।

13. (a) Show that the following series is convergent if $P > 2$ and divergent if $p \le 2$:

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी है यदि $P > 2$ एवं अपसारी है यदि $p \le 2$:

UOKonline.com

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^p+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(b) Examine the convergence of the following Hypergeometric series :

निम्नलिखित हाइपरज्यामितीय श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए:

$$1+\frac{a.b}{1.c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3c(c+1)(c+2)}x^3+.....$$

where a, b, c are positive.

जहाँ a, b, c सभी धनात्मक हैं।

UOKonline.com

14. If $f(x)=\begin{cases} x & \text{if x rational} \\ -x & \text{if x irrational} \end{cases}$

यदि $f(x)=\begin{cases} x & \text{यदि x परिमेय है} \\ -x & \text{यदि x अपरिमेय है} \end{cases}$

(a) then prove that $\lim_{x\to a} f(x)$ exist if $a=0$.

तो सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x\to a} f(x)$ विद्यमान होगी यदि $a=0$.

(b) If Roll's Theorem applicable for the following function in the interval $[a, b]$?

If yes, then verify the theorem:

क्या निम्न फलन के लिए अन्तराल $[a, b]$ में रोल प्रमेय लागू होता है? यदि हाँ, तो रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए:

UOKonline.com

$$f(x)=\log\left\{\frac{x^2+ab}{x+(a+b)}\right\}, 0\notin[a,b]$$

15. (a) if f be a real valued bounded function defined on $[a,b]$ and M and m are supemum and infimum of f in $[a,b]$, then prove that:

यदि फलन f, [a,b] पर परिभाषित परिसीमित वास्तविक फलन हो तथा M, m फलन f के [a,b] में क्रमशः उच्चक एवं निम्नक हों, तो सिद्ध कीजिए कि:

$m(b-a)\le L(f,p)\le U(f,p)\le M(b-a)\ \forall\ P\in[a,b]$

(b) Test the convergence of the following integral:

निम्नलिखित समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए:

UOKonline.com

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$